

Рассмотрим линейное однородное уравнение вида:

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{a_{ij} \partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu = 0 \quad (1_0)$$

Теорема (о приведении к каноническому виду)

Для любого уравнения вида (1_0) существует замена координат $s = Px$, такая, что в координатах $(s_1, \dots, s_n)$ уравнение приобретает вид:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i \partial^2 u}{\partial s_i^2} + \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{\partial u}{\partial s_k} + \gamma u = 0, \quad (\tilde{1}_0)$$

где $\varepsilon_i \in \{1, -1, 0\}$ для $i = 1, \dots, n$, $\beta_1, \dots, \beta_n, \gamma$ – некоторые числа.

Замена координат $s = Px$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где P – матрица перехода, $\det P \neq 0 \Rightarrow x = P^{-1}s$ – обратная замена координат.

Координаты $s = (s_1, \dots, s_n)$ называются каноническими. Запись в виде $(\tilde{1}_0)$ называется записью уравнения в канонических координатах. Вообще говоря, приведение уравнения к каноническому виду осуществляется неоднозначно, но количество «+», «-» и «0» в главной части $(\tilde{1}_0)$ будет всегда одинаковым. На этом основана следующая классификация уравнений 2-го порядка:

- I. $|\varepsilon_i| = 1$ для $\forall i$ и все ε_i имеют одинаковые знаки $\Rightarrow$ уравнение эллиптического типа.
Пример: $u_{s_1 s_1} + u_{s_2 s_2} = 0$ (уравнение Лапласа).
- II. $|\varepsilon_i| = 1$ для $\forall i$, но среди ε_i есть разные знаки $\Rightarrow$ уравнение гиперболического типа.
Пример: $u_{s_1 s_1} - u_{s_2 s_2} = 0$ (уравнение колебаний).
- III. $\exists \varepsilon_k = 0 \Rightarrow$ уравнение параболического типа.
Пример: $u_{s_1 s_1} - u_{s_2} = 0$ (уравнение теплопроводности).

Схема доказательства теоремы.

Рассмотрим уравнение:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu = 0. \quad (1_0)$$

Формально сопоставим его главной части квадратичную форму:

$$Q(\lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – формальные переменные.

$$A = (a_{ij}) - \text{матрица квадратичной формы, } Q(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Факт 1. Если $\lambda = C\mu$ – преобразование координат с матрицей перехода C , то квадратичная форма $Q(C\mu)$ в новых координатах $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ имеет матрицу $A' = C^T A C$.

Факт 2. Существует каноническое преобразование координат $\lambda = C\mu$, такое, что

$$Q(C\mu) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mu_i^2,$$

где $\varepsilon_i \in \{1, -1, 0\}$. В этом случае

$$A' = C^T A C = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \cdots & 0 \\ & \varepsilon_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varepsilon_n \end{pmatrix} - \text{диагональная матрица.}$$

Канонические координаты можно получить методом Лагранжа. При этом количество «+», «-» и «0» среди ε_i не зависит от способа приведения к каноническому виду (закон инерции для квадратичной формы).

Рассмотрим теперь, что происходит с дифференциальным уравнением (1_0) при замене переменных $s = Px$:

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Здесь $s_m = p_{m1}x_1 + p_{m2}x_2 + \dots + p_{mn}x_n, m = 1, 2, \dots, n$.

Выразим, как меняются производные $\frac{\partial}{\partial x_j}$ при таком преобразовании координат.

По теореме о производной сложной функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_j} &= \frac{\partial u}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial s_2} \frac{\partial s_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial s_n} \frac{\partial s_n}{\partial x_j} = \left\{ \frac{\partial s_k}{\partial x_j} = p_{kj} \right\} = \\ &= p_{1j} \frac{\partial u}{\partial s_1} + p_{2j} \frac{\partial u}{\partial s_2} + \dots + p_{nj} \frac{\partial u}{\partial s_n} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n p_{kj} \frac{\partial u}{\partial s_k}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^n p_{kj} \frac{\partial u}{\partial s_k} \right) = \sum_{k=1}^n p_{kj} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial s_k} \right) = \sum_{k=1}^n p_{kj} \sum_{l=1}^n p_{li} \frac{\partial^2 u}{\partial s_l \partial s_k} = \\ &= \sum_{k,l=1}^n p_{kj} p_{li} \frac{\partial^2 u}{\partial s_l \partial s_k} = \sum_{k,l=1}^n p_{li} p_{kj} \frac{\partial^2 u}{\partial s_l \partial s_k}. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в главную часть уравнения (1_0) :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k,l=1}^n p_{li} p_{kj} \frac{\partial^2 u}{\partial s_l \partial s_k} \right) = \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} p_{li} p_{kj} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s_l \partial s_k} = \\ &= \sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{lk} \frac{\partial^2 u}{\partial s_l \partial s_k}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{lk} &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} p_{li} p_{kj} = \sum_{i,j=1}^n p_{li} a_{ij} p_{kj} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n p_{li} a_{ij} \right) p_{kj} = \{p_{kj} = p_{jk}^T\} = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n p_{li} a_{ij} \right) p_{jk}^T\end{aligned}$$

– l -ая строка матрицы PA , умноженная на k -ый столбец P^T .

Факт 3. При преобразовании координат $s = Px$ матрица старших коэффициентов в уравнении (1_0) изменяется по правилу $\tilde{A} = PAP^T$.

Вопрос: как надо выбрать P для того, чтобы $\tilde{A}$ приняла наиболее простой вид?

Очевидный ответ: $P = C^T$, где C выбирается также, как в факте 2.

В этом случае $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \dots & 0 \\ & \varepsilon_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & \varepsilon_n \end{pmatrix}$ и уравнение (1_0) перейдет к каноническому виду

$(\tilde{1}_0)$. Количество «+», «-» и «0» не будет зависеть от способа приведения к каноническому виду (закон инерции). $\Rightarrow$ Наша классификация полностью обоснована. ■

Замечание

Полное утверждение об эквивалентности уравнений (1_0) и $(\tilde{1}_0)$ выглядит так:

Пусть функция $u = \tilde{f}(s) = \tilde{f}(s_1, \dots, s_n)$ есть решение уравнения $(\tilde{1}_0)$ из класса C^2 . Тогда функция $u = \tilde{f}(Px) = f(x_1, \dots, x_n)$ будет решением уравнения (1_0) (также из класса C^2). Более того, формула $u = \tilde{f}(Px) = f(x_1, \dots, x_n)$ описывает все возможные решения уравнения (1_0) . Здесь P – матрица, полученная по правилу $P = C^T$.